# ΛΥΣΕΙΣ ΘΕΜΑΤΩΝ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ 2024

## ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ .

**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**
**ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ**
**ΤΡΙΤΗ 4 ΙΟΥΝΙΟΥ 2024**
**ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ**
**ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Έστω μια συνάρτηση $f$, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν

- η $f$ είναι συνεχής στο $[\alpha, \beta]$ και
- $f(\alpha) \neq f(\beta)$

να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $\zeta$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha, \beta)$ τέτοιος ώστε $f(x_0) = \zeta$.

**Μονάδες 6**

**Α2.** Έστω μια συνάρτηση $f$ συνεχής σ' ένα διάστημα $\Delta$ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του $\Delta$. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση $f$ στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο $\Delta$;

**Μονάδες 4**

**Α3.** Να διατυπώσετε το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού.

**Μονάδες 5**

ΛΥΣΕΙΣ: Θεωρία του σχολικού βιβλίου.

**Α4.** *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

**α)** Αν $f, g$ είναι δύο συναρτήσεις με πεδία ορισμού $A, B$ αντίστοιχα, τότε η σύνθεση της $f$ με τη $g$, δηλαδή η συνάρτηση $g \circ f$, ορίζεται αν $f(A) \cap B \neq \varnothing$.

**β)** Ισχύει ότι $|\eta\mu x| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**γ)** Ισχύει $(\sigma\varphi x)' = \dfrac{1}{\eta\mu^2 x}$ , $x \in \mathbb{R} - \{x \mid \eta\mu x = 0\}$.

**δ)** Για κάθε συνάρτηση ισχύει ότι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα είναι το ολικό της μέγιστο.

**ε)** Έστω $f$ μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geq 0$.

**Μονάδες 10**

ΛΥΣΕΙΣ:

**α.)** Σωστό , **β.)** Σωστό , **γ.)** Λάθος ( είναι $-\frac{1}{\eta\mu^2\chi}$ ) , **δ.)** Λάθος (μπορεί μια συνάρτηση να παρουσιάζει τοπικά ακρότατα και να μην έχει καθόλου ολικά)
**ε.)** Σωστό.

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις $g:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

και $h:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$h(x)=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}.$$

**Β1.** Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $f=\frac{g}{h}$ και $r=g\cdot h$.

**Μονάδες 6**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Για αρχή θα πρέπει να δούμε αν ορίζονται οι παραπάνω συναρτήσεις δηλαδή να βρούμε το πεδίο ορισμού της f και της r.

$D_f$={x∈$D_g$∩$D_h$:h(x)≠0}={x≥1:$\sqrt{x}\neq\frac{1}{\sqrt{x}}$}={x≥1:x≠1}=(1,+∞) και
$D_r$={x∈$D_g$∩$D_h$}=[1,+∞)

με $f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}=\frac{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}}=\frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}}=\frac{x+1}{x-1}$ και $r(x)=g(x)h(x)=(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})(\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}})= \;=x-\frac{1}{x}$

Για τα παρακάτω ερωτήματα να θεωρήσετε ότι

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1},\ x>1 \quad \text{και} \quad r(x)=x-\frac{1}{x},\ x\geq 1.$$

**Β2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f$ αντιστρέφεται (μονάδες 2) και ότι $f^{-1}=f$ (μονάδες 5), όπου $f^{-1}$ είναι η αντίστροφη συνάρτηση της $f$.

**Μονάδες 7**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Για την ύπαρξη: <u>1ος τρόπος</u>: Με τον ορισμό της αμφιμονοσημαντης ( 1-1) συνάρτησης.
∀x,y∈$D_f$ με $f(x)=f(y)\Rightarrow\frac{x+1}{x-1}=\frac{y+1}{y-1}\Rightarrow$xy+y-x-1=xy+x-y-1⇒2x=2y⇒x=y,
άρα η f''1-1''⇒$\exists f^{-1}$
<u>2ος τρόπος</u>: Με απόδειξη μονοτονίας με χρήση παραγώγου.
Η f παραγωγίσιμη στο $D_f\subseteq\Re$ ως ρητή συνάρτηση με

$f'(x)=\frac{\chi-1-\chi-1}{(\chi-1)^2}=-\frac{2}{(\chi-1)^2}<0$ ∀x∈$D_f$⇒f γν.φθίνουσα⇒f”1-1”⇒∃$f^{-1}$

έπειτα πρέπει να βρώ το πεδίο ορισμού της $f^{-1}$ δηλαδή το σύνολο τιμών της της f. Γνωρίζω πως η f γνησίως φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της και συνεχής άρα $D_{f^{-1}}=R_f=f(D_f)=(\lim_{x\to-\infty}(f(x)), \lim_{x\to 1^+}(f(x)))=(1,+\infty)$, για να προσδιορίσω την $f^{-1}(x)$ λύνω ως προς x την παρακάτω εξίσωση: f(x)=y⇒$y=\frac{x+1}{x-1}$⇒yx-y=x+1⇒yx-x=y+1⇒ ⇒x(y-1)=y+1⇒$x=\frac{y+1}{y-1}$⇒$f^{-1}(y)=\frac{y+1}{y-1}$, με αλλαγή της ανεξάρτητης μεταβλητής έχω

$f^{-1}(\chi)=\frac{\chi+1}{\chi-1}$ , χ>1 , παρατηρώ πώς $f^{-1}$=f.

**Β3.** Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης r.

**Μονάδες 6**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Η r είναι συνεχης στο πεδίο ορισμού της το [1,+∞) έτσι έχει νόημα η αναζήτηση μόνο πλάγιων ασυμπτώτων στο +∞ έτσι $\lim_{\chi\to\infty}(\frac{r(x)}{x})=\lim_{\chi\to\infty}(1-\frac{1}{x^2})=1$ και $\lim_{\chi\to\infty}(f(x)-x)=\lim_{\chi\to\infty}(-\frac{1}{x})=0$, οπότε η $c_r$ έχει πλάγια ασύμπτωτη στο +∞ την διχοτόμο πρώτου- τρίτου τεταρτημορίου (ε):y=x.

**Β4.** Να λύσετε την εξίσωση $\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)$.

**Μονάδες 6**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Η εξίσωση αυτή έχει νόημα για όλα τα χ∈$D_f \cap D_r$=(1,+∞)

έτσι η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα $\chi^2=1+4\chi-\frac{4}{\chi}$⇔$\chi^3=\chi+4\chi^2-4$ ⇔ $\chi^3-4\chi^2-(\chi-4)=0$ ⇔ ⇔ $\chi^2(\chi-4)-(\chi-4)=0$ ⇔$(\chi^2-1)(\chi-4)=0$ ⇔(χ-1)(χ+1)(χ- 4)=0 ⇔χ=-1 ∨ χ=1 ∨ χ=4 όμως χ∈(1,+∞) άρα τελικά χ=4 η μοναδική λύση της δοθείσας εξίσωσης.

**ΘΕΜΑ Γ**

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}-2x+4+e^{\lambda}, & 0\le x<2\\ -x^2+4x-3+\lambda, & x\ge 2,\end{cases}$$

με $\lambda\in\mathbb{R}$.

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι $\lambda=0$.

**Μονάδες 5**

<u>ΛΥΣΗ</u>:

Δίνεται πως η f συνεχής συνάρτηση άρα θα είναι συνεχής και στο 2 στο οποίο είναι ορισμένη , τότε: $\lim_{x\to 2^-}$ f(x)= f(2) ⇔ $e^{\lambda}$=1+λ ⇔ $e^{\lambda}$-λ-1=0 **(1)**

Ορίζω την συνάρτηση φ:ℜ→ ℜ με φ(λ)= $e^{\lambda}$-λ-1, τότε η φ παραγωγίσιμη ως πράξεις παραγωγίσιμων στο ℜ συναρτήσεων με φ΄(λ)= $e^{\lambda}$-1, λ∈ℜ τότε φ΄(λ)>ο ⇔ $e^{\lambda}$>1⇔λ>0, όμοια φ΄(λ)<0⇔ $e^{\lambda}$<1⇔λ<0
επομένως καταλήγω πως η φ γνησιως αύξουσα στο (0,+∞) και φ γνησίως φθίνουσα στο (-∞,0) και φ συνεχής στο 0 ,
άρα minφ(λ)=φ(0)=0 , δεδομένου της μονοτονίας της φ καταλήγω πως αν λ>0⇒φ(λ)>0 και αν λ<0 ⇒φ(λ)>0 έτσι η **(1)**⇔φ(λ)=0⇔λ=0

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και στη συνέχεια να βρείτε, αν υπάρχουν, τα ακρότατά της.

**Μονάδες 6**

<u>ΛΥΣΗ</u>: f παραγωγίσιμη στο (0,2) και στο (2,+∞) ως πολυωνυμική.

Αν 0<x<2 , f΄(x)=-2 <0 , ∀x∈(0,2)

Αν 2, f΄(χ)=-2χ+4<0 , ∀x∈ (2,+∞) αφού χ>2⇒2χ>4⇒-2χ+4<0

από τα παραπάνω συμπεραίνω πως f γνησίως φθινουσα στο (0,2) και f γνησίως φθίνουσα στο (2,+∞) και επειδή η f είναι συνεχης και στο 0 και στο 2 απο την υπόθεση καταλήγω ότι f γνησίως φθίνουσα στο ο [2,+∞)

επομένως δεν γίνεται να έχει τοπικό ελάχιστο αλλά maxf(x)=f(0)=5, μοναδικό τοπικό ακρότατο και μάλιστα ολικό μέγιστο. ( αφού ∀χ≥2⇒ f(x) ≤f(2), με τη χρήση της μονοτονίας)

**Γ3. i)** Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού στο διάστημα $[0,3]$.

(μονάδες 4)

<u>ΛΥΣΗ</u>: ελέγχω αν τηρείται η παραγωγισιμότητα στο 2 ως σημείο αλλαγής τύπου,

$$\lim_{\chi\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{\chi\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2} = -\lim_{\chi\to 2^-}\frac{2(x-2)}{x-2} = -2 \in \Re$$

$$\lim_{\chi\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{\chi\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=-\lim_{\chi\to 2^+}\frac{(x-2)^2}{x-2}=-\lim_{\chi\to 2^+}(x-2)=0\in\Re$$

είναι $\lim_{\chi\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\neq\lim_{\chi\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\Rightarrow\nexists$ f΄(2)⇒ η f όχι παραγωγίσιμη στο (0,3) άρα δεν τηρούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος Μέσης Τιμής .

**ii)** Να βρείτε, αν υπάρχει, $\xi\in(0,3)$ τέτοιο ώστε η εφαπτομένη στη γραφική παράσταση της f στο σημείο $\Gamma(\xi, f(\xi))$ να είναι παράλληλη στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία $\Delta(0, f(0))$ και $E(3, f(3))$.

(μονάδες 4)

ΛΥΣΗ: Ο συντελεστής διεύθυνσης της ευθείας που ορίζουν τα σημεία Δ και Ε

είναι $\lambda=\frac{f(3)-f(0)}{3-0}=-\frac{5}{3}$, για να υπάρχει εφαπτομένη της $C_f$ παράλληλη στην ευθεία ΔΕ πρεπει η εφαπτομένη να αυτή να έχει ίδιο συντελεστή διεύθυνσης.

παρατηρώ πώς Α= f΄((0,2))={-2}⇒ $-\frac{5}{3}\notin A$ αρα θα λύσω την f΄(χ)= $-\frac{5}{3}$ για τα χ>2 έτσι έχω f΄(χ)= $-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\frac{5}{3}\Leftrightarrow -2x=-\frac{17}{3}\Leftrightarrow x=\frac{17}{6}$

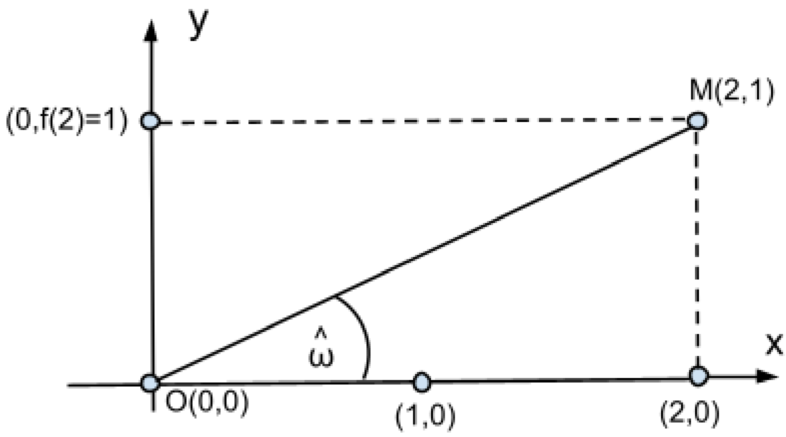
επίσης, $\frac{12}{6}<\frac{17}{6}<\frac{18}{6}\Rightarrow 2<\frac{17}{6}<3$, οπότε ∃ το ζητούμενο ξ και μάλιστα είναι ίσο με το $\frac{17}{6}$.

**Γ4.** Κινητό σημείο Μ ξεκινά από το σημείο $A(2,0)$ και κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω με σταθερή ταχύτητα $\upsilon=0,5$ μονάδες μήκους το δευτερόλεπτο. Αν Ο είναι η αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε τον ρυθμό με τον οποίο αυξάνεται η γωνία $\hat{\omega}=A\hat{O}M$ τη χρονική στιγμή κατά την οποία το κινητό σημείο Μ θα συναντήσει τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**Μονάδες 6**

ΛΥΣΗ: Για την δική μας βοήθεια φτιάχνουμε ένα ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΣΧΗΜΑ ( σε περίπτωση επίσημου γραπτού, αν δεν ζητείται, σχήμα αναφέρουμε πως είναι πρόχειρο για να μην βαθμολογηθεί σε περίπτωση λάθους!!)

# <u>ΠΡΟΧΕΙΡΟ ΣΧΗΜΑ</u>




Για να βρούμε σε τι ύψος θα βρεθεί το Μ με την $C_f$ βρίσκουμε πώς f(2)=1 επίσης το κινητό μετακινείται κατακόρυφα, άρα μόνο στον άξονα των y , έτσι u = y΄(t) και y΄(t)=0,5 ⇒ y(t)= 0,5t+ c , c ∈ℜ όμως δίνεται πως μόλις ξεκινάει (to=0) βρίσκεται στο σημείο (2,0) άρα y(0)=0 ⇔ c=0 , τελικά y(t)=0,5t

έπειτα για να βρώ ποιά στιγμή θα γίνει η συνάντηση λύνω y(t)=f(2)=1⇔0,5t=1⇔ ⇔t=2 επομένως θέλω να βρώ τον ρυθμό μεταβολής της γωνίας ω την χρονική στιγμή t1=2 sec.

την t1, έχω πώς εφ(ω(t1=2))= $\frac{y(2)}{2}$=0,5,

κάθε άλλη χρονική στιγμή εφω=$\frac{y(t)}{2}$=0,5y(t) παραγωγίζοντας με **ΑΠΛΗ** συνεπαγωγή έχω πώς $\frac{\omega'(t)}{συν^2(t)}$=0,5y΄(t) όμως θέλω να βάλω στην θέση του t την t1=2 και ο μόνος τριγωνομετρικός αριθμός που μπορέσαμε να βρούμε είναι η εφαπτομένη οπότε θα αντικαταστήσουμε το συν$^2$ με την εφ$^2$ σύμφωνα με τον τύπο που θα αποδείξουμε ( η απόδειξη του τύπου δεν είναι υποχρεωτική)

από την τριγωνομετρική ταυτότητα είναι γνωστό πώς ημ$^2$x + συν$^2$x=1 διαιρούμε με συν$^2$x≠0 αφου το συνx βρίσκεται σε παρονομαστή

καταλήγω στη σχέση εφ$^2$ω + 1 = $\frac{1}{συν^2\omega}$,

τελικά η αρχική σχέση γίνεται (εφ$^2$ω + 1)$\omega'(t)$=0,5*0,5=0,25 και αν βάλω όπου t την t1=2, φτάνω στη σχέση ($\frac{1}{4}$+1)$\omega'(2)$=0,25⇔ $\frac{5}{4}\omega'(2)$=0,25 ⇔ ⇔ $\omega'(2)$=0,2 rad/sec

**ΘΕΜΑ Δ**

Έστω η συνάρτηση $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ με τύπο

$$f(x)=\frac{\ln x+\alpha x}{x},$$

όπου $\alpha\in\mathbb{R}$.

Δίνεται ότι το σύνολο τιμών της $f$ είναι το $f((0,+\infty))=\left(-\infty,1+\frac{1}{e}\right]$.

**Δ1.** Να αποδείξετε ότι $\alpha=1$.

**Μονάδες 4**

<u>ΛΥΣΗ</u>: $f(x)=\frac{lnx+ax}{x}=\frac{lnx}{x}+\alpha$ , $\alpha\in\Re$

δίνεται πώς $f((0,+\infty))=(-\infty,\ 1+\frac{1}{e}]\Rightarrow \max f(x)=1+\frac{1}{e}$

$f'(x)=\frac{1-lnx}{x^2}$ , $x>0$ τότε $f'(x)<0 \Leftrightarrow 1<\ln x \Leftrightarrow x>e$ και $f'(x)>0 \Leftrightarrow 1>\ln x \Leftrightarrow x<e$ άρα η f γνησίως αύξουσα στο (0,e) και γνησίως φθίνουσα στο (e,+∞) και f συνεχής στο e ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων επομένως $\max f(x)=f(e) \Leftrightarrow 1+\frac{1}{e}=\frac{1}{e}+\alpha \Leftrightarrow \alpha=1$

**Δ2.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική ρίζα, $x_0$, η οποία ανήκει στο διάστημα $\left(\frac{1}{2},1\right)$.

**Μονάδες 6**

<u>ΛΥΣΗ</u>: Για αρχή θα αποδείξουμε την μοναδικότητας της ρίζας:

<u>1ος τρόπος</u> :

Λύνω την εξίσωση $f(x)=0 \Leftrightarrow \frac{lnx}{x}+1=0 \Leftrightarrow \ln x+x=0 \Leftrightarrow \ln x+\ln e^{x}=0 \Leftrightarrow \ln(xe^{x})=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow xe^{x}=1 \Leftrightarrow xe^{x}-1=0$ **(1)** , Ορίζω $\varphi(x)=xe^{x}-1$, $x>0$ , η φ παραγωγίσιμη στο (0,+∞) ως πράξεις παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\varphi'(x)=xe^{x}+e^{x}=e^{x}(x+1)>o$, $\forall x>0$ άρα η φ γνησίως αύξουσα στο (0,+∞) ⇒ φ"1-1" άρα η εξίσωση **(1)** ⇔ φ(x)=0, έχει μοναδική λύση.

<u>2ος τρόπος</u> : f γνησίως αύξουσα στο (0,e) και συνεχής σε αυτο επομένως

$f((0,e))=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to e^-} f(x))=(-\infty,\ 1+\frac{1}{e})$

f γνησίως φθίνουσα στο [e,+∞) και συνεχής σε αυτό επομένως

$f([e,+\infty))=(\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)\ ,\ \lim\limits_{x\to e^+} f(x)]$ με χρήση D.L.H $f([e,+\infty))=(1,1+\frac{1}{e}]$,

παρατηρώ πώς $0\notin f([e,+\infty))$ ενώ $0\in f((0,e))$ άρα $\exists x_o\in(0,e)$: $f(x_o)=0$ και επειδή η f γνησίως μονότονη στο (0,e) τοτε το $x_o$ αυτο είναι μοναδικό (δηλ.$\exists! x_o\in(0,e)$: $f(x_o)=0$)

Για την ύπαρξη ρίζας στο διάστημα $(\frac{1}{2},1)$ θα χρησιμοποιήσουμε το Θ. Bolzano

- Η f συνεχής στο $[\frac{1}{2},1]$ ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων
- $f(\frac{1}{2})=2ln\frac{1}{2}+1=-2ln2+1=-ln4+1<0$, αφού $4>e \Rightarrow ln4>1 \Rightarrow -ln4+1<0$

επιπλέον f(1)=1>0 , άρα $f(\frac{1}{2})f(1)<0$

οπότε απο Θ. Bolzano $\exists xo \in (\frac{1}{2},1)$: f(xo)=0 και επειδή η f έχει μοναδική ρίζα τότε η f έχει μοναδική ρίζα η οποία βρίσκεται στι $(\frac{1}{2},1)$

<u>3ος τρόπος</u> : Ολικός.

βρίσκω $f([e,+\infty))=(1,1+\frac{1}{e}]$, όπως το είδαμε προηγουμένως, όπου $0 \notin f([e,+\infty))$

επίσης $(\frac{1}{2},1) \subset (0,e)$ όπου η f γνησίως αύξουσα και συνεχής στο$(\frac{1}{2},1)$

τώρα $f((\frac{1}{2},1))=(\lim_{x\to \frac{1}{2}^+} f(x), \lim_{x\to 1^-} f(x))$ και f συνεχής και στο $\frac{1}{2}$ και στο 1 άρα

$f((\frac{1}{2},1))=(f(\frac{1}{2}), f(1))=(-ln4+1,1)$ , τότε $0 \in f((\frac{1}{2},1)) \subseteq f((0,e))$ και f γνησίως μονότονη στο (0,e) τελικά η f έχει μοναδική ρίζα $xo \in f((\frac{1}{2},1))$

**Δ3.** i) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=f(4)$ έχει δύο ακριβώς λύσεις, τις $x_1=2$ και $x_2=4$.

(μονάδες 3)

<u>ΛΥΣΗ</u>:

Προφανως f(4)=f(4), επειδή η f συνάρτηση και $f(2)=f(4) \Leftrightarrow \frac{ln2}{2}+1=\frac{ln4}{4}+1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4ln2=2ln4 \Leftrightarrow 2ln2=ln4 \Leftrightarrow ln4=ln4$ , ισχύει άρα σίγουρα το x1=2 και x2=4 λύσεις της δοθείσας εξίσωσης.

Για την μοναδικότητα: Ορίζω π(χ)= f(x) - f(4) , x>0 τότε η π παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων στο $(0,+\infty)$ με $π'(x)=f'(x)$ για την οποία f΄ γνωρίζουμε $f'(x)<0, \forall x \in (e,+\infty)$ και $f'(x)>0, \forall x \in (0,e)$ από το Δ1 και αφού $π'(x)=f'(x)$ τότε και $π'(x)<0, \forall x \in (e,+\infty)$ και $π'(x)>0, \forall x \in (0,e)$ άρα η π γνησίως αύξουσα στο (0,e) και γνησίως φθίνουσα στο $(e,+\infty)$ και επειδή η π είναι και συνεχής στα παραπάνω διαστήματα θα είναι

$π((0,e))=(\lim_{x\to 0^+} π(x), \lim_{x\to e^-} π(x))=(-\infty, \frac{1}{e}-\frac{ln4}{4})$ και $π([e,+\infty))=(\lim_{x\to +\infty} π(x), \lim_{x\to e^+} π(x)]$

με χρήση D.L.H $π([e,+\infty))=(-\frac{ln4}{4}, \frac{1}{e}-\frac{ln4}{4}]$

Έστω $\frac{1}{e}$ - $\frac{ln4}{4}$≤ 0 ⇔$\frac{1}{e}$≤ $\frac{ln4}{4}$ ⇔ $\frac{lne}{e}$+1≤$\frac{ln4}{4}$ +1⇔f(e)≤f(4) και επειδή η f γνησίως φθίνουσα στο (e,+∞) τότε καταλήγω πώς e≥4, άτοπο άρα $\frac{1}{e}$ - $\frac{ln4}{4}$>0

άρα 0∈π((0,e)) και π γνησίως μονότονη στο (0,e) υπάρχει μοναδική ρίζα της π άρα και της δοθείσας εξίσωσης στο (0,e)
δηλ. [(∃!x1∈ (0,e): π(x1)=0)⇔ ∃!x1∈ (0,e): f(x1)=f(4) ]

ομοίως 0∈π([e,+∞)) και π γνησίως μονότονη στο [e,+∞) άρα υπάρχει μοναδική ρίζα της π άρα και της δοθείσας εξίσωσης στο [e,+∞)
δηλ. [(∃!x2∈[e,+∞): π(x2)=0)⇔ ∃!x2∈[e,+∞): f(x2)=f(4) ]

Τέλος, η εξίσωση f(x)=f(4) έχει δύο μοναδικές λύσεις την x1=2 και την x2=4

**ii)** Να λύσετε την ανίσωση $2^x \le x^2$ στο διάστημα $(0,+\infty)$.

(μονάδες 5)

ΛΥΣΗ:

Επειδή η ln είναι γνησίως αύξουσα η αρχική ανίσωση γίνεται ισοδύναμα
xln2 ≤ 2lnx ⇔ $\frac{ln2}{2} \le \frac{lnx}{x}$ ⇔ $\frac{ln2}{2}$ +1 ≤ $\frac{lnx}{x}$ +1 ⇔ f(2) ≤ f(x) **(1)**

∀x∈(0,e] η **(1)** ⇔ 2 ≤ x , επειδή f γν. αύξουσα στο (0,e] και x∈(0,e] , άρα x∈[2,e]

∀x∈[e,+∞) η **(1)** ⇔ f(2)≤ f(x) ⇔ * f(4)≤ f(x) **(2)**, αφού f(2)=f(4) και επίσης f γν. φθίνουσα στο [e,+∞) έτσι η **(2)** ⇔ 4≥x και x∈[e,+∞) , άρα x∈[e,4]

Τελικά, **(1)**⇔x∈[2,4]

*= υπάρχουν τρία σημάδια που μας οδηγούν να βάλουμε το f(4) στη θέση του f(2) πρώτων, επειδή είμαστε στο δεύτερο μέρος του ερωτήματος που αποδείξαμε πώς f(2)=f(4). Δεύτερον επειδή αν δεν το κάναμε η δεύτερη περίπτωση δεν θα έδινε λύσεις και Τρίτων, το 4∈[e,+∞) ενώ το 2∉[e,+∞).

**Δ4.** Δίνεται επιπλέον η συνάρτηση $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με τύπο

$$g(x)=f(e^x)\cdot\frac{1-x}{e^x}.$$

Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου $\Omega$ που βρίσκεται ανάμεσα στις ευθείες $x=-\ln 2$ και $x=0$, και περικλείεται από αυτές, τον άξονα $x'x$ και τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $g$.

**Μονάδες 7**

ΛΥΣΗ: g(x) =f($e^x$)*$\frac{1-x}{e^x}$=$\frac{x+e^x}{e^x}$*$\frac{1-x}{e^x}$ , x∈ℜ

τότε, $\frac{1-x}{e^x}$ >0 ⇔ x<1 και $\frac{1-x}{e^x}$ < 0 ⇔ x>1 επομένως $\frac{1-x}{e^x}$ >0 στο (-ln2,0)

επιπλέον g(x)= $\frac{x+e^x}{e^x}$*$\frac{1-x}{e^x}$ = $\frac{x-x^2+e^x-xe^x}{e^{2x}}$ = $\frac{x}{e^{2x}}$ - $\frac{x^2}{e^{2x}}$ + $\frac{1}{e^x}$ - $\frac{x}{e^x}$

f($e^x$)=0 ⇔$e^x$=xo ⇔ x=lnxo , από το Δ2

και επειδή f(x) και η $e^x$ γν. αύξουσες στο διάστημα αυτο τότε για

x<lnxo ⇒ f($e^x$)<0 και x>lnxo ⇒ f($e^x$)>0 οπότε,

Έστω ℜ∋ Ω=L= $\int_{-ln2}^{0}$ |g(x)|dx= - $\int_{-ln2}^{lnxo}$ g(x)dx + $\int_{lnxo}^{0}$ g(x)dx =

Θέτω u=$\frac{x}{e^x}$ διαφορίζοντας έχω du=$\frac{e^x-xe^x}{e^{2x}}$dx⇒ du=$\frac{1-x}{e^x}$dx

επιπλέον πρέπει να βρώ τα καινούργια όρια ολοκλήρωσης

$\lim_{x\to -ln2}$ (u)= $\lim_{x\to -ln2}$ ($\frac{x}{e^x}$)=$\frac{-ln2}{\frac{1}{2}}$=$\frac{ln\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}$ =2ln $\frac{1}{2}$

και $\lim_{x\to 0}$ (u)= $\lim_{x\to 0}$ ($\frac{x}{e^x}$)=0 και $\lim_{x\to lnxo}$ (u) = $\lim_{x\to lnxo}$ ($\frac{x}{e^x}$)= $\frac{lnxo}{xo}$ + 1 - 1 = f(xo) -1=-1

άρα L= - $\int_{-ln2}^{lnxo}$ ($\frac{x}{e^{2x}}$ - $\frac{x^2}{e^{2x}}$ + $\frac{1}{e^x}$ - $\frac{x}{e^x}$) dx+ $\int_{lnxo}^{0}$ ($\frac{x}{e^{2x}}$ - $\frac{x^2}{e^{2x}}$ + $\frac{1}{e^x}$ - $\frac{x}{e^x}$) dx=

= - $\int_{-ln2}^{lnxo}$ g(x)dx + $\int_{lnxo}^{0}$ g(x)dx = - $\int_{-ln2}^{lnxo}$ ($\frac{x}{e^x}$+1)*$\frac{1-x}{e^x}$dx + $\int_{lnxo}^{o}$ ($\frac{x}{e^x}$+1)*$\frac{1-x}{e^x}$dx **(1)**

και αφού θέσουμε το u όπως φαίνεται παραπάνω η **(1)** ⇔

⇔ L= - $\int_{2ln\frac{1}{2}}^{-1}$ (u+1)du + $\int_{-1}^{0}$(u+1)du =-$[\frac{u^2}{2}+u]_{2ln\frac{1}{2}}^{-1}$ +$[\frac{u^2}{2}+u]_{-1}^{0}$=

=- $\frac{1}{2}$ + 1 + 2l$n^2\frac{1}{2}$+ 2ln$\frac{1}{2}$ - $\frac{1}{2}$ + 1 = 2l$n^2$2 -2ln2 + 1 τ.μ.

ΝΙΚΟΛΑΟΣ ΑΓΓΕΛΑΚΗΣ